# Контрольные вопросы и задачи

## Записать законы двойственности. Доказать один из них. (5)

В булевой алгебре существует несколько законов двойственности, одним из которых является закон Де Моргана (и его двойственность). Давайте запишем эти законы двойственности и докажем один из них.

Закон Де Моргана:

Для конъюнкции (И) двух выражений:

Двойственное выражение для A И B - это A' + B'.

Для дизъюнкции (ИЛИ) двух выражений:

Двойственное выражение для A ИЛИ B - это A' \* B'.

Теперь докажем закон Де Моргана для дизъюнкции (ИЛИ). Пусть у нас есть два булевых выражения A и B, и мы хотим доказать, что (A ИЛИ B)' = A' \* B'.

Доказательство:

Начнем с левой части (A ИЛИ B)':

(A ИЛИ B)' = A' \* B' // это то, что мы хотим доказать

Теперь докажем равенство, рассматривая случаи:

a) Если A = 0 и B = 0, то:

(A ИЛИ B)' = (0 ИЛИ 0)' = 1' = 0

A' \* B' = 1 \* 1 = 1

Поскольку левая и правая стороны равны 0, равенство выполняется.

b) Если A = 0 и B = 1, то:

(A ИЛИ B)' = (0 ИЛИ 1)' = 1' = 0

A' \* B' = 1 \* 0 = 0

В этом случае также левая и правая стороны равны 0.

c) Если A = 1 и B = 0, то:

(A ИЛИ B)' = (1 ИЛИ 0)' = 1' = 0

A' \* B' = 0 \* 1 = 0

Опять же, левая и правая стороны равны 0.

d) Если A = 1 и B = 1, то:

(A ИЛИ B)' = (1 ИЛИ 1)' = 1' = 0

A' \* B' = 0 \* 0 = 0

В этом случае также левая и правая стороны равны 0.

Во всех возможных случаях левая и правая части равенства равны 0, что подтверждает истинность закона Де Моргана для операции дизъюнкции.

## Упростить выражение с использованием законов булевой алгебры. (2)

Давайте упростим данное булево выражение шаг за шагом, используя законы булевой алгебры:

Исходное выражение: **ab ∨ ac' ∨ ab'c' ∨ a' ∨ a'bc'**

Шаг 1: Используем закон ассоциативности и коммутативности для перегруппировки и упрощения термов:

**ab ∨ a' ∨ a'bc' ∨ ac' ∨ ab'c'**

Шаг 2: Используем закон дистрибутивности, чтобы объединить термы, содержащие **a**:

**ab ∨ a' ∨ ac' ∨ (a' + b'c')**

Шаг 3: Используем закон дистрибутивности снова, чтобы объединить термы, содержащие **a'**:

**ab ∨ (a' + ac' + b'c')**

Шаг 4: Используем закон инверсии: **A + A' = 1**, чтобы упростить **(a' + ac' + b'c')** к **1**:

**ab ∨ 1**

Шаг 5: Используем закон идентичности: **A ∨ 1 = 1**, чтобы упростить **ab ∨ 1** к **1**:

**1**

Итак, упрощенное булево выражение равно **1**.

## Является ли аналитическая форма булевой функции нормальной, и если является, то какой (дизъюнктивной или конъюнктивной)? (3) Может ли эта форма являться канонической, и если может, то какой (дизъюнктивной или конъюнктивной) и при каких условиях? (2)

Аналитическая форма булевой функции, которую вы представили, имеет вид:

y = (x₁ ̅) ∨ x₂ ∨ (x₃ ̅)

Это аналитическая дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции. В ДНФ функция представлена в виде дизъюнкции (логического ИЛИ) множества термов, каждый из которых представляет собой конъюнкцию (логического И) переменных или их отрицаний. В данном случае, у вас есть три терма:

1. (x₁ ̅)
2. x₂
3. (x₃ ̅)

Каждый терм представляет собой либо одну переменную, либо её отрицание, объединенное операцией ИЛИ.

Это не является канонической нормальной формой. Канонические нормальные формы булевых функций включают в себя совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ). СДНФ представляет функцию как дизъюнкцию конъюнкций всех возможных наборов значений переменных, при которых функция равна 1, а СКНФ представляет функцию как конъюнкцию дизъюнкций всех возможных наборов значений переменных, при которых функция равна 0.

Если вы хотите представить данную функцию в канонической нормальной форме, вам потребуется пересчитать её в СДНФ или СКНФ. СДНФ будет представлять функцию в виде дизъюнкции, а СКНФ - в виде конъюнкции.

## Действует ли сочетательный закон в отношении операции запрета? Ответ обосновать. (5)

Сочетательный закон (Associative Law) действует в отношении операции запрета (NOT, инверсии), но он работает в особой форме, которая применима к этой унарной операции. Сочетательный закон утверждает, что порядок, в котором применяются операции, не влияет на результат.

Формальное выражение для операции запрета (NOT) обозначается как "¬" или "!" и работает так: если у нас есть булева переменная x, то ¬x обозначает инверсию её значения. То есть, если x = 1, то ¬x = 0, и наоборот.

Теперь давайте рассмотрим сочетательный закон для операции запрета:

1. (¬x)¬ = x
2. ¬(¬x) = x

Это говорит о том, что двойное применение операции запрета к одной и той же переменной приведет к исходному значению этой переменной.

Пример: Пусть x = 1, тогда ¬x = 0. Если мы применим операцию запрета дважды: ¬(¬x), то получим ¬(0), что равно 1, и это в итоге снова значение переменной x.

Следовательно, сочетательный закон действует в отношении операции запрета, но в унарной форме, когда операция применяется к одной и той же переменной.

## Записать функцию с помощью операций булева базиса. (2)

Функцию y = x₁ → (x₂ ̅), где "→" обозначает импликацию (условное выражение), можно записать с использованием операций булева базиса, таких как И (AND), ИЛИ (OR), и НЕ (NOT). Вот как это можно сделать:

y = ¬x₁ ∨ (x₂ ̅)

Здесь:

* ¬x₁ - это отрицание x₁.
* x₂ ̅ - это отрицание x₂.
* ∨ - это логическое ИЛИ (OR).

Таким образом, функция y выражена с использованием операций булева базиса, и она равна логическому ИЛИ между отрицанием x₁ и отрицанием x₂.

## Записать функцию в канонических формах. (4)

Функцию y = (x₁ ̅) ↓ x₂, где "↓" представляет операцию NAND (отрицание И-НЕ), можно записать в канонической дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) и канонической конъюнктивной нормальной форме (СКНФ).

Сначала найдем СДНФ (каноническую дизъюнктивную нормальную форму). СДНФ представляет функцию как дизъюнкцию конъюнкций, включая все наборы значений переменных, при которых функция равна 1:

y = (x₁ ̅) ↓ x₂

Сначала найдем значения y для всех возможных комбинаций x₁ и x₂:

1. Когда x₁ = 0 и x₂ = 0: y = (1) ↓ 0 = 1
2. Когда x₁ = 0 и x₂ = 1: y = (1) ↓ 1 = 0
3. Когда x₁ = 1 и x₂ = 0: y = (0) ↓ 0 = 1
4. Когда x₁ = 1 и x₂ = 1: y = (0) ↓ 1 = 1

Теперь составим СДНФ, включая только наборы переменных, при которых y = 1:

СДНФ(y) = (x₁ ̅ ∧ x₂) ∨ (x₁ ∧ x₂)

Теперь найдем СКНФ (каноническую конъюнктивную нормальную форму), которая представляет функцию как конъюнкцию дизъюнкций, включая все наборы переменных, при которых функция равна 0:

СКНФ(y) = (x₁ ̅ ∨ x₂) ∧ (x₁ ∨ x₂ ̅)

Таким образом, функция y = (x₁ ̅) ↓ x₂ может быть записана как СДНФ и СКНФ.

## Не пользуясь таблицей истинности, получить канонические формы булевой функции . (8)

Для получения канонических форм булевой функции y = (x₁ ∨ (x₃ ̅)) & (x₂ ̅), можно применить метод алгебры логики, используя законы и свойства булевой алгебры. В данном случае, мы будем использовать законы дистрибутивности и де Моргана.

1. Начнем с раскрытия отрицания x₂:

y = (x₁ ∨ (x₃ ̅)) & (¬x₂)

1. Далее, распространим конъюнкцию через дизъюнкцию с использованием закона дистрибутивности:

y = (x₁ & ¬x₂) ∨ ((x₃ ̅) & ¬x₂)

1. Применим закон де Моргана ко второму члену:

y = (x₁ & ¬x₂) ∨ (¬(x₃ & x₂))

1. Теперь можно использовать закон де Моргана для раскрытия отрицания во втором члене:

y = (x₁ & ¬x₂) ∨ (¬x₃ ∨ ¬x₂)

1. Используя закон дистрибутивности, объединим первый и второй члены:

y = (x₁ & ¬x₂) ∨ ¬x₃ ∨ ¬x₂

Таким образом, каноническая дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) для функции y = (x₁ ∨ (x₃ ̅)) & (x₂ ̅) равна:

y = (x₁ & ¬x₂) ∨ ¬x₃ ∨ ¬x₂

Пожалуйста, обратите внимание, что это является одной из возможных СДНФ для данной функции, и другие эквивалентные формы также могут быть использованы.

## Записать функцию в символической форме. (5)

Функцию f^3 (x) = ¬x₁ ∨ ¬x₃ можно записать в символической форме следующим образом:

f^3 (x) = ¬x₁ ∨ ¬x₃

Здесь:

* ¬x₁ представляет отрицание переменной x₁.
* ¬x₃ представляет отрицание переменной x₃.
* ∨ обозначает логическое ИЛИ (OR).

Таким образом, функция f^3 (x) равна логическому ИЛИ между отрицаниями x₁ и x₃.

## Представить функцию в канонических формах. (6)

Для представления функции f^3 (x) = f\_107^3 в канонических формах, необходимо сначала определить булеву функцию f\_107^3 и затем представить её в виде канонических нормальных форм: совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) и совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ).

Булева функция f\_107^3, представленная в виде таблицы истинности, будет иметь 8 возможных комбинаций значений переменных x₁, x₂ и x₃:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение, Мультимедийное программное обеспечение

Автоматически созданное описание

Теперь, чтобы выразить эту функцию в виде СДНФ (конъюнкция дизъюнкций), мы берем все наборы переменных, при которых функция равна 1, и объединяем их через операцию ИЛИ (OR). В данном случае, это только первый набор:

СДНФ(f\_107^3) = (¬x₁ ∧ ¬x₂ ∧ ¬x₃)

Для представления функции в виде СКНФ (дизъюнкция конъюнкций), мы берем все наборы переменных, при которых функция равна 0, инвертируем их и объединяем через операцию И (AND). В данном случае, это 7 остальных наборов:

СКНФ(f\_107^3) = (x₁ ∨ x₂ ∨ x₃) ∧ (x₁ ∨ x₂ ∨ ¬x₃) ∧ (x₁ ∨ ¬x₂ ∨ x₃) ∧ (x₁ ∨ ¬x₂ ∨ ¬x₃) ∧ (¬x₁ ∨ x₂ ∨ x₃) ∧ (¬x₁ ∨ x₂ ∨ ¬x₃) ∧ (¬x₁ ∨ ¬x₂ ∨ x₃)

Таким образом, функция f^3 (x) = f\_107^3 может быть представлена в канонической форме как:

СДНФ(f\_107^3) = (¬x₁ ∧ ¬x₂ ∧ ¬x₃)

СКНФ(f\_107^3) = (x₁ ∨ x₂ ∨ x₃) ∧ (x₁ ∨ x₂ ∨ ¬x₃) ∧ (x₁ ∨ ¬x₂ ∨ x₃) ∧ (x₁ ∨ ¬x₂ ∨ ¬x₃) ∧ (¬x₁ ∨ x₂ ∨ x₃) ∧ (¬x₁ ∨ x₂ ∨ ¬x₃) ∧ (¬x₁ ∨ ¬x₂ ∨ x₃)

## Сколько 1-кубов накрывается одним 4-кубом? Ответ обосновать. (5)

Для определения всех 2-кубов, которые могут быть полностью накрыты кубом с заданным булевым значением (XX10X), нужно рассмотреть, какие комбинации переменных будут удовлетворять условию. В данном случае, символ "X" означает, что переменная может быть как 0, так и 1.

## Записать все 2-кубы, которые накрываются кубом XX10X. (3)

Все возможные комбинации переменных X, Y и Z будут следующими:

1. X = 0, Y = 0, Z = 0: 00100
2. X = 0, Y = 0, Z = 1: 00101
3. X = 0, Y = 1, Z = 0: 01100
4. X = 0, Y = 1, Z = 1: 01101
5. X = 1, Y = 0, Z = 0: 10100
6. X = 1, Y = 0, Z = 1: 10101
7. X = 1, Y = 1, Z = 0: 11100
8. X = 1, Y = 1, Z = 1: 11101

Эти восемь 2-кубов полностью накрывают куб с булевым значением XX10X.

## Найти существенные импликанты булевой функции . (10)

## Булева функция от четырех переменных принимает значение, равное нулю, на наборах (0, 7, 8, 13) и безразличное значение – на наборах (2, 6, 10, 14). Найти минимальную ДНФ этой функции. (10)

## Привести пример минимального покрытия булевой функции от четырех переменных, для которого Sa =10, Sb=14. (6)

## Привести пример булевой функции от четырех переменных, для которой минимальная ДНФ совпадает с канонической, а минимальная КНФ не совпадает с канонической, и число существенных вершин равно пяти. Функцию представить в числовой форме. (5)

## Для функции из примера 15 найти минимальную КНФ. (6)

## Является ли покрытие булевой функции, состоящее из кубов 0X0, 10X, X00 минимальным? Ответ обосновать. (5)

## Минимальное единичное покрытие булевой функции состоит из кубов 0X0 и X10. Найти минимальную КНФ. (6)

## В отношении минимального покрытия сформулировать условия, при которых цена схемы с парафазными входами, построенной на элементах булева базиса по минимальной форме, совпадает с ценой S*a* минимального покрытия. (3)

## Перечислить все базовые функции булевой алгебры, сохраняющие константу 0. (3)

## Является ли функция равнозначности нелинейной? Утверждение доказать. (3)

## Является ли функция запрета монотонной? Утверждение доказать.(3)

## Реализовать дизъюнкцию в базисе Жегалкина. (4)

## Дополнить функцию импликации минимальным количеством других булевых функций так, чтобы полученная система была функционально полной, но не избыточной. (2) Доказать функциональную полноту системы, используя конструктивный подход. (8)

1. В чем состоит отличие между комбинационной и последовательностной логическими схемами? (2 балла)
2. В чем состоит отличие между позитивным и негативным кодированием двоичного сигнала? (2 балла)
3. Дать оценку нижней и верхней границы цены по Квайну для схемы с однофазными входами, построенной на элементах базиса (ИЛИ, НЕ) по минимальной КНФ. (Примечание: оценка должна содержать цены минимального покрытия – Sa и Sb.) (5 баллов)
4. В отношении минимального нулевого покрытия сформулировать условия, при которых цена схемы с однофазными входами, построенная на элементах булева базиса по минимальной КНФ, будет совпадать с ценой покрытия Sb. (4 балла)
5. Применительно к минимальной ДНФ сформулировать условия, при которых схема с однофазными входами, построенная на элементах базиса (И, НЕ) по этой форме, будет иметь задержку T = 3t, где t – задержка на одном логическом элементе. (4 балла)
6. В отношении минимальной КНФ сформулировать условия, при которых схема с однофазными входами, построенная на элементах булева базиса по этой форме будет иметь задержку T = 3t, где t – задержка на одном логическом элементе. (4 балла)
7. Сформулировать условия, при которых вынесение одной буквы за скобки из термов минимальной КНФ приводит к уменьшению цены схемы, (5 баллов) и проиллюстрировать их примерами. (2 балла за каждый пример)
8. В любом ли случае вынесение за скобки двух букв из двух термов минимальной ДНФ приводит к уменьшению цены схемы? Ответ обосновать и сопроводить поясняющими примерами. (6 баллов)
9. Построить схему, реализующую функцию равнозначности на элементах ИЛИ-НЕ и обладающую минимальной ценой. (3 балла)
10. Построить схему с однофазными входами, реализующую функцию на элементах базиса (ИЛИ, НЕ) и обладающую минимальной ценой. (5 баллов) Определить цену и задержку схемы. (1 балл)
11. Построить схему с парафазными входами, реализующую функцию из вопроса 10 на элементах базиса (И, НЕ) и обладающую минимальной задержкой. (4 балла) Определить цену и задержку схемы. (1 балл)
12. Построить схему с однофазными входами, реализующую функцию на двухвходовых элементах И-НЕ и содержащую минимальное количество элементов. (5 баллов)
13. Построить схему, реализующую конъюнкцию шести переменных на двухвходовых элементах ИЛИ-НЕ. (5 баллов)
14. Применительно к схеме с парафазными входами, построенной на элементах булева базиса, сформулировать условия, при которых эквивалентное преобразование в базис И-НЕ приводит к изменению цены схемы. (3 балла)
15. Построить схему с парафазными входами, реализующую систему булевых функций от трех переменных:

на элементах булева базиса и обладающую минимальной ценой по Квайну. (15 баллов) Определить цену и задержку схемы (2 балла)

1. Булевы функции и принимают противоположные значения на всех наборах аргументов, кроме (1110) и (1100), на которых значения функций совпадают и равны единице и нулю соответственно. Решить задачу декомпозиции применительно к системе функций (y1, y2), выразив функцию y1 через y2, (2 балла) а также y2 через y1. (2 балла)
2. Определить функцию, реализуемую схемой. (4 балла)





*x*3

*y*

&

1

&

3

&

5

&

4

&

2

&

6





*x*2





Определить реакцию схемы на входной набор (10101). (2 балла) Преобразовать схему к двухвходовому базису (ИЛИ-НЕ) с минимальной ценой. (6 баллов)

1. Булева функция *y=f 4(x)* принимает значение, равное нулю, на наборах (3, 5, 8, 10, 13) и безразличное значение – на наборах (1, 4, 7, 14). Построить схему с парафазными входами, реализующую данную функцию на элементах базиса И-НЕ и обладающую минимальной ценой. (20 баллов) Определить реакцию схемы на одном из безразличных наборов и пояснить ее. (3 балла)